

Curso Académico: 2022/23

## 27013 - Geometría de curvas y superficies

### Información del Plan Docente

**Año académico:** 2022/23

**Asignatura:** 27013 - Geometría de curvas y superficies

**Centro académico:** 100 - Facultad de Ciencias

**Titulación:** 453 - Graduado en Matemáticas

**Créditos:** 10.5

**Curso:** 3

**Periodo de impartición:** Anual

**Clase de asignatura:** Obligatoria

**Materia:**

## 1. Información Básica

### 1.1. Objetivos de la asignatura

Profundizar en el estudio de forma que capacite al alumno para reconocer la presencia de la matemática en distintos ámbitos (naturaleza, ciencia, tecnología, arte...).

Colaborar al desarrollo de las competencias asociadas a la labor del futuro matemático.

Estos planteamientos y objetivos están alineados con los siguientes Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) de la Agenda 2030 de Naciones Unidas (<https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/>), de tal manera que la adquisición de los resultados de aprendizaje de la asignatura proporciona capacitación y competencia para contribuir en cierta medida a su logro: Objetivo 4: Educación de calidad; Objetivo 5: Igualdad de género; Objetivo 8: Trabajo decente y crecimiento económico; Objetivo 9: Industria, innovación e infraestructuras; Objetivo 10: Reducción de las desigualdades; Objetivo 17: Alianzas para lograr los objetivos.

### 1.2. Contexto y sentido de la asignatura en la titulación

Esta es una asignatura interdisciplinar donde el álgebra, el análisis, la topología y la geometría van de la mano. Se utilizan herramientas y técnicas ya estudiadas en el grado para resolver problemas geométricos. Aporta visión espacial y el ámbito de aplicación de los resultados obtenidos es susceptible de ser utilizado en cualquier otra asignatura del grado. En particular la asignatura constituye un primer contacto del alumno con el campo de la geometría diferencial, cuya continuación natural se encuentra en el módulo de Ampliación de Geometría y Topología.

### 1.3. Recomendaciones para cursar la asignatura

Para cursar la asignatura se recomienda haber aprobado la otra asignatura del módulo (Topología General) así como haber superado el módulo de Álgebra Lineal y Geometría y las asignaturas de Análisis Matemático I, Análisis Matemático II y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Se recomienda cursarla simultáneamente con Variable Compleja y Ecuaciones en Derivadas Parciales por las interacciones entre las asignaturas.

## 2. Competencias y resultados de aprendizaje

### 2.1. Competencias

Al superar la asignatura, el estudiante será más competente para:

Competencias transversales:

- CT1 Saber expresar con claridad, tanto por escrito como de forma oral, razonamientos, problemas, informes...etc.
- CT3 Distinguir ante un problema lo que es sustancial de lo que es accesorio, formular conjeturas y razonar para confirmarlas o refutarlas, identificar errores en razonamientos incorrectos, etc.

Competencias específicas:

- CE1 Comprender y utilizar el lenguaje y método matemáticos. Conocer demostraciones rigurosas de los teoremas básicos de las distintas ramas de la matemática.

- CE2 Proponer, analizar, validar e interpretar modelos de situaciones reales sencillas, utilizando las herramientas matemáticas más adecuadas a los fines que se persigan.
- CE3 Resolver problemas matemáticos mediante habilidades de cálculo básico y otras técnicas.
- CE4 Utilizar aplicaciones informáticas con distintos tipos de software científico para experimentar en matemáticas y resolver problemas.

## 2.2. Resultados de aprendizaje

El estudiante, para superar esta asignatura, deberá demostrar los siguientes resultados:

- Reconocer la naturaleza de los puntos de una curva en  $\mathbf{R}^2$  y  $\mathbf{R}^3$ .
- Cálculo del diedro y del triedro de Frenet y de la curvatura y torsión. Teoremas fundamentales.
- Usar la primera forma fundamental de una superficie para resolver sobre ella problemas de longitudes, ángulos y áreas.
- Usar la segunda forma fundamental de una superficie para reconocer la naturaleza de sus puntos. Conocer su relación con la aplicación de Gauss. Saber calcular, aplicar e interpretar las curvaturas principales, de Gauss y media.
- Comprender las propiedades geométricas intrínsecas: derivada covariante, teorema egregio de Gauss, geodésicas y Gauss-Bonnet.
- Entender la diferencia entre los problemas locales y globales.

## 2.3. Importancia de los resultados de aprendizaje

Proporcionan al estudiante conocimientos y procedimientos que se encuentran en la base de otras asignaturas. Algunos de los resultados obtenidos (teorema egregio de Gauss, geometrías no euclídeas...) tienen en la historia de las matemáticas una relevancia fundamental.

# 3. Evaluación

## 3.1. Tipo de pruebas y su valor sobre la nota final y criterios de evaluación para cada prueba

El estudiante deberá demostrar que ha alcanzado los resultados de aprendizaje previstos mediante las siguientes actividades de evaluación:

La evaluación se distribuye como sigue:

- Las pruebas escritas tienen un peso del 60% debiendo alcanzar una nota mínima de 4 sobre 10 para aprobar.
- Las prácticas informáticas tienen un peso del 20%.
- La evaluación continua tendrá un peso del 20%.
- El estudiante podrá examinarse de parte de la asignatura al final del primer cuatrimestre y necesitará obtener al menos un 4 sobre 10 para poder promediar con la segunda parte de la asignatura.
- En las convocatorias oficiales el estudiante podrá presentarse a una parte de la asignatura o a las dos, necesitando en cualquier caso que la nota en cada una de ellas sea al menos 4 sobre 10 para poder promediar.
- La evaluación de las prácticas se realizará de la manera siguiente:
  - un 25% (5% del total) por el aprovechamiento de las prácticas en clase;
  - otro 25% (5% del total) por la evaluación de los problemas a entregar;
  - un 50% (10% del total) por la evaluación del examen de prácticas.
  - Los alumnos que hubieran aprobado las prácticas en cursos precedentes podrán elegir entre mantener las notas anteriores o cursar las prácticas.
- La evaluación continua consistirá en la presentación en clase de problemas, en la entrega de problemas de clase o en la realización de trabajos solicitados por grupos de alumnos.

Los alumnos que lo deseen podrán presentarse únicamente a una prueba específica global que evalúe la adquisición de las competencias de la asignatura.

# 4. Metodología, actividades de aprendizaje, programa y recursos

## 4.1. Presentación metodológica general

El proceso de aprendizaje que se ha diseñado para esta asignatura se basa en lo siguiente:

- Clases de teoría.
- Clases de problemas.
- Prácticas con ordenador con software libre.
- Trabajos en grupo, estudio y trabajo personal.

## 4.2. Actividades de aprendizaje

El programa que se ofrece al estudiante para ayudarle a lograr los resultados previstos comprende las siguientes actividades:

- Trabajo presencial (105 horas). Consta de:
  - Clases teóricas.
  - Clases de problemas.
  - Prácticas de ordenador (cinco prácticas de dos horas).
  - Tutorías.
- Trabajo no presencial (157,5 horas): comprende el estudio teórico de la asignatura, la realización de ejercicios propuestos, el tiempo dedicado a la resolución de problemas y el que se deriva de las actividades realizadas en el laboratorio informático.

Las actividades docentes y de evaluación se llevarán a cabo de modo presencial salvo que, debido a la situación sanitaria, las disposiciones emitidas por las autoridades competentes y por la Universidad de Zaragoza dispongan realizarlas de forma telemática o semitelemática con aforos reducidos rotatorios.

## 4.3. Programa

El objetivo de esta asignatura es el estudio de la geometría diferencial de curvas y superficies en el plano y en el espacio euclídeo.

- *Tema 1.* Curvas planas regulares. Diedro de Frénet (campos vectorial y normal), parámetro arco y curvatura. Teoría de contacto. Teorema fundamental de curvas planas. Curvas como subvariedades.
- *Tema 2.* Curvas birregulares en  $\mathbb{R}^3$ . Triedro de Frénet (campos tangente, normal y binormal), parámetro arco, curvatura, torsión, evolutas. Teorema fundamental de curvas. Forma canónica local.
- *Tema 3.* Superficies regulares. Teoría local: gráficas de 2-funciones, cartas y valores regulares de 3-funciones. Ejemplos. Superficies parametrizadas. Curvas en superficies, planos tangentes. Cartas, campos coordenados, cambios de cartas.
- *Tema 4.* Funciones y aplicaciones diferenciables. Primera Forma Fundamental: longitudes, ángulos y áreas. Orientaciones
- *Tema 5.* Curvaturas normal y geodésica. Segunda Forma Fundamental y aplicación de Gauss. Tipos de puntos en una superficie, curvaturas principales, normal y de Gauss. Curvas asintóticas y líneas de curvatura, puntos umbílicos. Campos vectoriales sobre superficies y campos de direcciones.
- *Tema 6.* Geometría intrínseca. Derivadas covariantes, Teorema egregio de Gauss. Isometrías y aplicaciones conformes, cartas isotermas. Geodésicas y aplicación exponencial: distancias y convexidad. Teoremas de Gauss-Bonnet.

## 4.4. Planificación de las actividades de aprendizaje y calendario de fechas clave

Las clases se imparten según el calendario académico establecido por la Universidad de Zaragoza y horario aprobado por la Facultad de Ciencias (ver página [web](#)): durante el primer semestre hay tres horas semanales de clase (teoría y problemas) que pasan a ser cuatro en el segundo. Las fechas concretas claves para el desarrollo del curso (incluyendo horarios de prácticas) se darán con la suficiente antelación en la plataforma [Moodle](#).

Habrà una prueba escrita al final del primer cuatrimestre y otra al final del curso, en fechas acordes con el periodo habilitado para exámenes dentro del calendario académico de la Facultad. El examen de prácticas se realizará en la última sesión de estas.

## 4.5. Bibliografía y recursos recomendados

- Do Carmo, Manfredo P., *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J), 1976, viii+503.
- Cordero, Luis A. *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica* / Luis A. Cordero, Marisa Fernández, Alfred Gray . Buenos Aires. Addison-Wesley Iberoamericana, cop. 1995.
- Costa, Antonio F. *Notas de geometría diferencial de curvas y superficies* / Antonio F. Costa, José Manuel Gamboa, Ana M. Porto Madrid: Sanz y Torres, D.L. 1997.
- [Paul Zimmermann](#), Alexandre Casamayou, [Nathann Cohen](#), [Guillaume Connan](#), [Thierry Dumont](#), [Laurent Fousse](#), François Maltey, Matthias Meulien, [Marc Mezzarobba](#), [Clément Pernet](#), [Nicolas M. Thiéry](#), Erik Bray, [John Cremona](#), Marcelo Forets, [Alexandru Ghitza](#), Hugh Thomas. *Computational Mathematics with Sagemath*.

Disponible en <https://www.sagemath.org/sagebook/english.html>

<http://psfunizar10.unizar.es/br13/egAsignaturas.php?codigo=27013>